Дәріс 3. Өтпелі функция. Беріліс функциясы.

PhD, Калиева Н.Б.

ӨТПЕЛІ ФУНКЦИЯ

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dy^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dx^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_m x \quad (1)$$

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0 \qquad (2)$$

сипаттаушы теңдеудің шешімі n түбірді береді (комплексті, нақты, жорамал). Біртекті сызықты ДТ-нің жалпы шешімін, n экспонентаның қосындысы ретінде алуға болады:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t} \qquad (3)$$

мұндағы, C_i – интегралдау тұрақтылары, p_i – сипаттаушы теңдеудің түбірлері.

$p = \pm\sigma$ нақты түбірлері, олар экспоненталардың шексіз өсуін, немесе нөлге дейін азаюын қамтамасыз етеді.

$p = \pm\sigma \pm j\omega$ комплексті түбірлері өспелі, немесе өшпелі тербелістерді береді.

$p = \pm j\omega$ жорамал түбірлерге ие экспоненталар гармоникалық тербелуді көрсетеді.

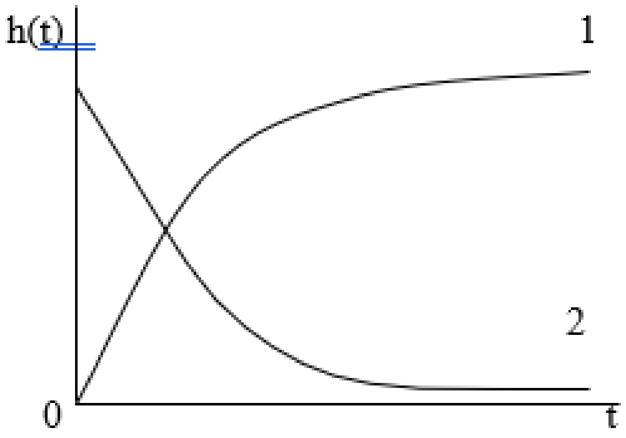
Өтпелі үдеріс қисығының аналитикалық түрін екі жолмен табуға болады. Бірінші – жүйені сипаттайтын ДТ-ні шешу арқылы. Ол үшін кіре беріс әсерін $x = 1$ деп, және бастапқы шарттарды орнына қойып, ДТ-ні шешеміз. Екінші – ол операторлық теңдеуді шешу. Яғни операторлық теңдеуге бірлік сатылы әсердің бейнесін енгізіп, түп нұсқаны табамыз.

Кейбір автоматты басқару жүйелерінде импульсті өтпелі функциялар маңызды рөл атқарады. Оларды жүйенің кіре берісіне бірлік импульс беру арқылы алады. Импульсты өтпелі функция сатылыдан ерекшеленеді, себебі импульсті функция сатылы функцияның туындысы болып табылады:

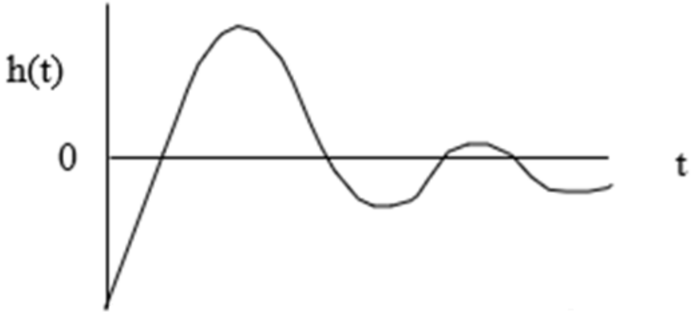
$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t).$$

Өтпелі функцияның бірінші реттік туындысын **салмақ функциясы** деп атайды:

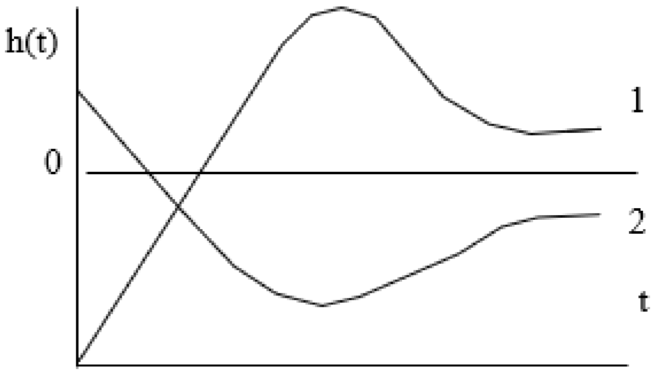
$$w(t) = \frac{dh}{dt}.$$



Монотонды



Тербелуші



Апериодты

БЕРІЛІС ФУНКЦИЯСЫ

$$a_0\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dy^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y = b_0\frac{d^m x}{dt^m} + b_1\frac{d^{m-1}x}{dx^{m-1}} + \ldots + b_{m-1}\frac{dx}{dt} + b_m x \quad (1)$$

мұндағы, y – басқарылатын шама, x – басқаратын шама; екеуі де уақыт функциясы; a_i, b_i – тұрақты коэффициеттер. Теңдеудің оң жағы әсерді сипаттайды, ал сол жағы басқарылатын шаманың өзгеруін сипаттайды.

(1) теңдеуге Лаплас түрлендіруін қолдансақ:

$$a_0p^nY(p) + a_1p^{n-1}Y(p) + \ldots + a_nY(p) = b_0p^mX(p) + b_1p^{m-1}X(p) + \ldots + b_mX(p)$$

немесе

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)Y(p) = (b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m)X(p) \qquad (2)$$

$$b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_{m-1}p + b_m = B(p), \qquad (3)$$

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n = D(p) \qquad (4)$$

$$D(p)Y(p) = B(p)X(p)$$

$Y(p)/X(p)$ қатынасын **беріліс функциясы** деп атайды. Оны әдетте, $W(p)$ деп белгілейді:

$$W(p) = \frac{\mathrm{B}(p)}{D(p)}. \qquad (5)$$

Операторлық теңдеуді беріліс функциясын қолданып та жазуға болады:

$$Y(p) = W(p)\, X(p). \qquad (6)$$

$D(p)$ полиномын **сипаттаушы** деп атайды. Оны нөлге теңестіру арқылы жүйенің **сипаттаушы теңдеуін** алуға болады.

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0 . \qquad (7)$$

Сипаттаушы теңдеу ДТ-нің түбірі мен шешімін табуға мүмкіндік береді. Ал сипаттаушы полином, жүйені орнықтылыққа тексеруде басты рөл атқарады.

1-мысал

Төмендегі ДТ-мен сипатталатын жүйенің беріліс функциясын және сипаттаушы теңдеуін жазайық:

$$2\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 10\frac{dy(t)}{dt} + 25y(t) = 3\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + 100x(t).$$

ДТ-дегі айнымалыларды Лаплас түрлендіруін қолданып түрлендірейік:

$$\frac{d}{dt}, \frac{d^2}{dt^2}, \frac{d^3}{dt^3} \longrightarrow p, p^2, p^3$$

$$y(t) \longrightarrow Y(p)$$

$$x(t) \longrightarrow X(p)$$

Операторлық теңдеуді аламыз:

$$(2p^3 + 6p^2 + 10p + 25)\,Y(p) = (3p^2 + 10p + 100)X(p).$$

$$W(p) = \frac{3p^2 + 10p + 100}{2p^3 + 6p^2 + 10p + 25}.$$

$$B(p) = 3p^2 + 10p + 100,$$

$$D(p) = 2p^3 + 6p^2 + 10p + 25.$$

Сипаттаушы теңдеу:

$$2p^3 + 6p^2 + 10p + 25 = 0.$$

Ұсынылатын әдебиеттер:

1. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.
2. Қыдырбекұлы А.Б. Автоматика негіздері : оқу құралы / Қыдырбекұлы А.Б., Ибраев Ғ.Е.. — Алматы: Казахский национальный университет им. аль-Фараби, 2014. — 114 с.
3. В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. Теория систем автоматического управления. – С.-Пб.: Профессия, 2004. – 752 с.
4. Лукас В.А. Теория автоматического управления: Учебник для вузов. – Екатеринбург: Из-во УГГГА, 2002. – 675 с.
5. Kluever C. A. Dynamic systems: modeling, simulation, and control. – John Wiley & Sons, 2020.